Zur Frage der Approximation durch orthonormierte Polynomsysteme

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

In einem vorigen Aufsatz hat Verfasser u. a. Folgendes bewiesen[1]):

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *ein im Intervall* (a,b) *orthonormiertes Funktionensystem.*[2]) *Dann kann man zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *ein in* (a,b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *und eine Folge von meßbaren Mengen* G_n *in* (a,b) *derart angeben, daß*

$$\mu(G_n)\leqq\varepsilon_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

und für jedes $x\in CG_n$[3])

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_n(x)}P_n(x)|\leqq\varepsilon_n \qquad (\textit{mit } j_n(x)=0 \textit{ oder } 1)$$

gilt $(n=1,2,\ldots)$.

Also können die Absolutbeträge der Glieder eines orthonormierten Funktionensystems, außer einer Menge von beliebig kleinem Maß, mit beliebiger Genauigkeit durch die Absolutbeträge der entsprechenden Glieder eines orthonormierten Polynomsystems approximiert werden.

Wir beweisen nun, daß dieser Satz nicht derart verschärft werden kann, daß die Funktionswerte selbst und nicht nur ihre Absolutbeträge approximiert werden; es gilt nämlich der folgende

Satz. *Es gibt ein im Intervall* $(0,1)$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *und eine positive Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *derart, daß für kein im Intervall* $(0,1)$ *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *und für keine Folge*

---

1) L. Leindler, Über die orthogonalen Polynomsysteme, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 19—46.

2) In dieser Arbeit betrachten wir nur *reellwertige* Funktionen auf einem *endlichen* Intervall (a,b).

3) CH bezeichnet immer die Komplementärmenge der Menge H in bezug auf das jeweils betrachtete Grundintervall (a,b). Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

von meßbaren Mengen E_n *in* (0, 1) *die Bedingungen*

(1) $$\mu(E_n) \leqq \varepsilon_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

und

(2) $$|\Phi_n(x)-P_n(x)| \leqq \varepsilon_n \quad \textit{für} \quad x \in CE_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

erfüllt sind.

Beweis. Wir definieren ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ im Intervall (—1, 1) und eine Indexfolge $\{n_k\}$ folgenderweise:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}(n+1)} & \text{für} \quad \dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}<x<\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$n_1=1$, und $n_{k+1}-n_k=k$ $(k=1,2,\ldots)$.

Dann definieren wir mittels dieses Funktionensystems das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ folgenderweise:

$$\Phi_{n_k+m}(x)=\varphi_k(x-(2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-(m+1)}))$$
$$(0<x<1;\ k=1,2,\ldots;\ m=0,1,\ldots,k-1).$$

Aus der Definition ist es klar, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ein orthonormiertes System im Intervall (0, 1) bilden und die Funktionen $\Phi_{n_k+m}(x)$ $(k=1,2,\ldots;\ m=0,1,\ldots,k-1)$ im Intervall (c_{n_k+m}, d_{n_k+m}) positiv und sonst gleich Null sind, wobei $c_{n_k+m}=(2^{k-1}-1)2^{-k}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-(m+1)}$ und $d_{n_k+m}=(2^k-1)2^{-(k+1)}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-(m+1)}$ ist. Für m fest und $k\to\infty$ konvergieren die Punkte c_{n_k+m} und d_{n_k+m} gegen den Punkt $x_m=(2^{m+1}-1)2^{-(m+1)}$.

Es sei $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ ein beliebiges normiertes (nicht notwendigerweise orthogonales) Polynomsystem in (0, 1) und $\{\varepsilon_n\}$ eine positive Zahlenfolge mit $\varepsilon_n=M_n^{-6}$, wobei $M_n=\max\limits_{0<x<1}\Phi_n(x)$ ist.

Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl l eine von l abhängige Indexfolge $\{n_k(l)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ derart, daß

(3) $$|\varrho^l_{n_k(l)}|\,\varepsilon^{-1/3}_{n_k(l)}\to\infty \qquad (k\to\infty)$$

gilt, wobei

$$\varrho^l_n=\int_0^1 P_l(x)\,\Phi_n(x)\,dx$$

ist.

Da $P_l(x)$ nur endlich viele Nullstellen besitzt, so gibt es eine solche natürliche Zahl $m(l)$, für die der Punkt $x_{m(l)}=(2^{m(l)+1}-1)2^{-(m(l)+1)}$ keine Nullstelle des Polynoms $P_l(x)$ ist. Dann gibt es auch eine Umgebung des Punktes $x_{m(l)}$, in der $|P_l(x)|\geqq\alpha_{m(l)}>0$ ist.

Wir betrachten jetzt die Teilfolge $\{\Phi_{n_k+m(l)}(x)\}$ $(k=m(l)+1, m(l)+2, \ldots)$ unseres Funktionensystems. Für genügend großes k ist das Intervall $(c_{n_k+m(l)}, d_{n_k+m(l)})$ in der genannten Umgebung des Punktes $x_{m(l)}$ enthalten, und so gilt

$$|\varrho^l_{n_k+m(l)}|=\left|\int_0^1 P_l(x)\,\Phi_{n_k+m(l)}(x)\,dx\right|=\left|\int_{c_{n_k+m(l)}}^{d_{n_k+m(l)}} P_l(x)\,2^{\frac{1}{2}(k+1)}\,dx\right|\geqq \alpha_{m(l)}2^{-\frac{1}{2}(k+1)}.$$

Wir setzen $n_k(l)=n_k+m(l)$. Dann ist

$$|\varrho^l_{n_k(l)}|\,\varepsilon^{-1/2}_{n_k(l)}\geqq \alpha_{m(l)}2^{-\frac{1}{2}(k+1)}2^{k+1}=\alpha_{m(l)}2^{\frac{1}{2}(k+1)}\to\infty \qquad (k\to\infty).$$

Damit haben wir die Behauptung (3) bewiesen.

Wir nehmen jetzt an, daß es zu unserem Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und zur obigen Folge $\{\varepsilon_n\}$ ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ und eine Folge von meßbaren Mengen E_n in $(0, 1)$ gibt, für die (1) und (2) erfüllt sind.

Die Behauptung (3) gilt dann auch für dieses orthonormierte Polynomsystem $\{P_n(x)\}$. Andererseits gilt für $l\neq n_k(l)$ $(k=m(l)+1, m(l)+2, \ldots)$:

$$|\varrho^l_{n_k(l)}|=\left|\int_0^1 P_l(x)\big(\Phi_{n_k(l)}(x)-P_{n_k(l)}(x)\big)dx\right|\leqq$$

$$\leqq\Big\{\Big(\int_{CE_{n_k(l)}}+\int_{E_{n_k(l)}}\Big)\big(\Phi_{n_k(l)}(x)-P_{n_k(l)}(x)\big)^2dx\Big\}^{1/2}\leqq$$

$$\leqq\varepsilon_{n_k(l)}+\Big\{2\int_{E_{n_k(l)}}\Phi^2_{n_k(l)}(x)\,dx+2\int_{E_{n_k(l)}}P^2_{n_k(l)}(x)\,dx\Big\}^{1/2}.$$

Es gelten ferner die Abschätzungen

$$\int_{E_n}\Phi_n^2(x)\,dx\leqq\varepsilon_n M_n^2 \quad\text{und}\quad \int_{E_n}P_n^2(x)\,dx\leqq\varepsilon_n(M_n^2+2).$$

Die erste ist klar und die zweite folgt durch eine einfache Rechnung:

$$\int_{E_n}P_n^2(x)\,dx=1-\int_{CE_n}P_n^2(x)\,dx\leqq 1-\int_{CE_n}(\Phi_n(x)-\varepsilon_n)^2dx+\varepsilon_n^2<1-$$

$$-\Big(\int_{CE_n}\Phi_n^2(x)\,dx-2\varepsilon_n\int_{CE_n}\Phi_n(x)\,dx\Big)+\varepsilon_n^2=$$

$$=1-\Big(1-\int_{E_n}\Phi_n^2(x)\,dx-2\varepsilon_n\int_{CE_n}\Phi_n(x)\,dx\Big)+\varepsilon_n^2<\varepsilon_n M_n^2+2\varepsilon_n=\varepsilon_n(M_n^2+2).$$

Daraus folgt

$$|\varrho^{l}_{n_k(l)}| \leqq 5 M^{-2}_{n_k(l)} = 5 \varepsilon^{1/3}_{n_k(l)},$$

im Widerspruch zu (3).

Aus diesem Wiederspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

(Eingegangen am 16. April 1960)